# CHAPITRE 7 : Oscillateur harmonique

L'importance du concept d'oscillateur harmonique vient de ce qu'il décrit le comportement général d'un système à un degré de liberté au voisinage d'une position d'équilibre stable.

## 1. Oscillateur harmonique

### 1.1. Définition

On appelle oscillateur harmonique tout système dont le paramètre ou degré de liberté $x(t)$ qui le caractérise est une fonction sinusoïdale du temps. Cette fonction peut se mettre sous la forme :

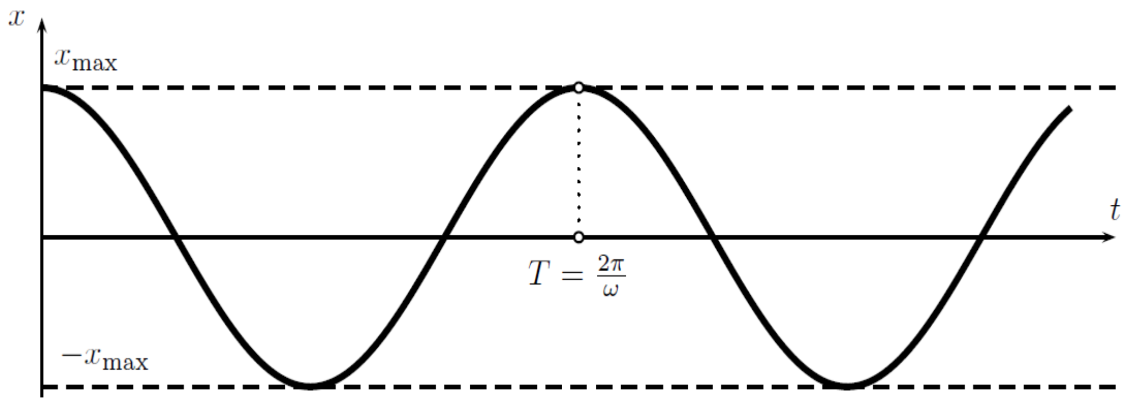
$$\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

- ✓ $x(t)$ : l'élongation ou la position à l'instant $t$. Elle varie entre les valeurs $-X_m$ et $X_m$
- ✓ $X_m$ : élongation maximale ou amplitude de l'élongation, à ne pas confondre avec l'amplitude crête à crête qui désigne l'écart entre les valeurs extrêmes (soit $2X_m$)
- ✓ $\omega$ : pulsation
- ✓ $\varphi$ : phase initiale ou phase à l'origine des temps ($t = 0$)
- ✓ $\omega t + \varphi$ : phase à l'instant $t$

La période $T$ des oscillations est le temps mis par l'oscillateur pour revenir à une position identique quel que soit le choix de cette position. C'est aussi le temps mis pour faire une oscillation complete ou un ''aller retour''. Mathématiquement la période $T$ est définie par :

$$\boxed{\exists T / \forall t \qquad x(t+T) = x(t)}$$

L'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique est représentée ci-après :




### 1.2. Equation différentielle

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -X_m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -X_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \Longrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. Les solutions sont de la forme sinusoïdale d'où le terme harmonique. Les conditions initiales sont définies à l'instant $t = 0$ :

$$\boxed{\begin{cases} x(t=0) = x_0 = X_m \cos\varphi \\ \dfrac{dx(t=0)}{dt} = v_0 = -X_m\omega \sin\varphi \end{cases}}$$

On peut encore écrire $\boldsymbol{x(t) = X_m \cos\varphi \cos\omega t - X_m \sin\varphi \sin\omega t}$ ou encore $\boldsymbol{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}$ où $A$ et $B$ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales. Cette relation est parfois pratique. En tenant compte des conditions initiales on a :

$$\left.\begin{aligned} A &= X_m \cos\varphi = x_0 \\ B &= X_m \sin\varphi = +\frac{v_0}{\omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

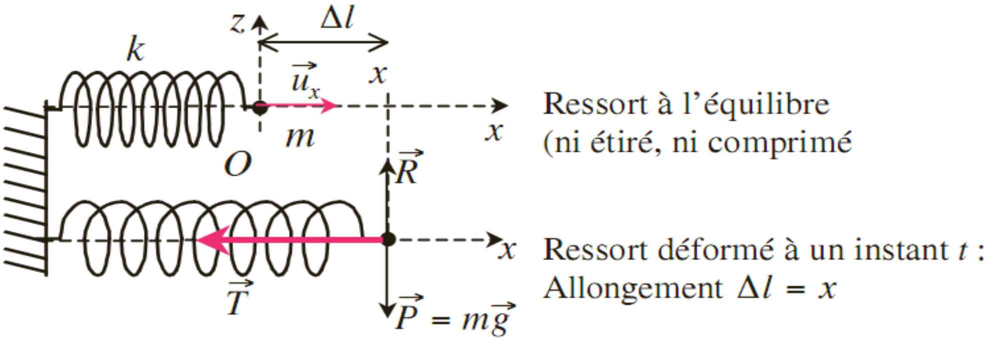
Et donc :

$$\boxed{X_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega x_0}}$$

## 1.3. Exemples d'oscillateurs harmoniques

### 1.3.1. Le pendule élastique horizontal



- Système étudié : la masse $m$
- Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen. La masse est repérée par son abscisse $x$ sur un axe horizontal $Ox$
- Bilan des forces : la tension $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$, le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ du support de la masse.
- Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$
- Projection suivant la verticale (axe $Oz$) :

$$R - P = m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

(pas de mouvement vertical, la masse reste sur l'horizontale)

- Projection suivant l'horizontale (axe $Ox$) :

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

- Equation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

En posant$\omega_0 = \sqrt{k/m} \Longrightarrow \omega_0^2 = k/m$ , on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La masse oscille donc indéfiniment avec une période $T_0$ des oscillations donnée par $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{k/m}$.

$X_m, \varphi$ dépendent des conditions du problème. On indique souvent les conditions initiales qui sont en général : à l'instant $t = 0$, on allonge le ressort d'une quantité $X_0$ et on lâche sans donner de vitesse. Cela se traduit par :

$$\begin{cases} x(t=0) = X_0 \\ \dfrac{dx}{dt}(t=0) = v(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(t=0) = X_0 \Longrightarrow X_0 = X_m \cos\varphi$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = v$$

$$v(0) = 0 \Longrightarrow 0 = -X_m\omega_0 \sin\varphi \Longrightarrow \sin\varphi = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ ou \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

Les solutions possibles sont donc :

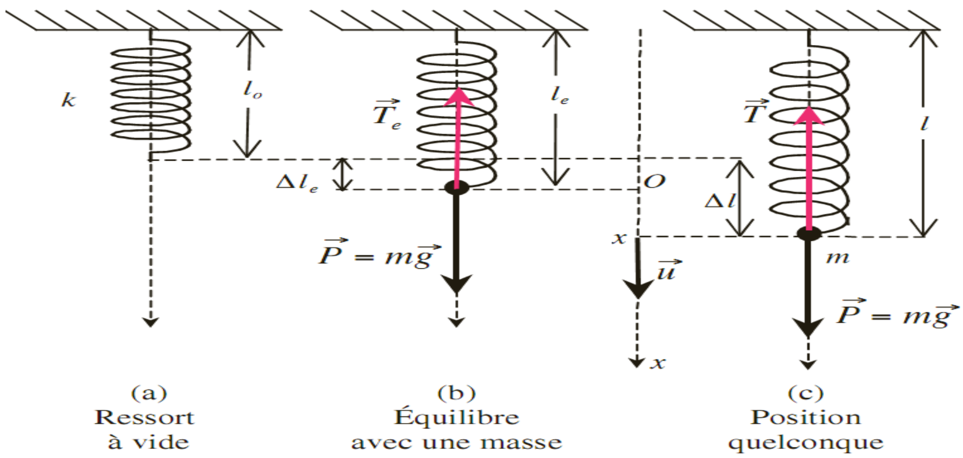
$$\varphi = 0 \Longrightarrow X_0 = X_m \cos\varphi = X_m \Longrightarrow x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\varphi = \pi \Longrightarrow X_0 = X_m \cos\varphi = -X_m \Longrightarrow x(t) = -X_m \cos(\omega_0 t + \pi)$$

Les 2 solutions sont identiques puisque $\cos(\omega_0 t) = -\cos(\omega_0 t + \pi)$. On conserve la 1ère expression qui correspond à une amplitude positive et à une expression plus simple. Soit :

$$\boxed{x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)}$$

## 1.3.2.Le pendule élastique vertical




Le système constitué de la masse $m$ est etudié dans le référentiel terrestre galiléen. Il y a deux forces exterieures agissant sur le système : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du ressort. Avec un axe vertical orienté vers le bas et un vecteur unitaire $\vec{u}$, on peut écrire :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{P} = mg\vec{u} \text{ et } \vec{T} = -k\Delta l\,\vec{u}$$

- étude à l'équilibre : le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0} \Longrightarrow mg - k\Delta l_e = 0$$

- étude en mouvement (instant $t$) : le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Longrightarrow mg - k\Delta l = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

L'allongement du ressort à l'instant $t$ est : $\Delta l = \Delta l_e + x$

$$\Longrightarrow mg - k(\Delta l_e + x) = m\frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow \underbrace{mg - k\Delta l_e}_{=0} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Soit

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

L'équation différentielle obtenue pour le pendule vertical est identique à celle obtenue pour le pendule élastique horizontal. On doit cependant remarquer que la variable $x$ ne représente pas la même chose dans les deux cas :

- ressort horizontal : $x$ correspond à l'allongement du ressort (origine prise lorsque le ressort est ni étiré, ni comprimé)
- ressort vertical : $x$ correspod à la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre pour laquelle le ressort présente déjà un allongement $\Delta l_e$.

### 1.3.3.Energie mécanique pour le pendule élastique

- **Cas du pendule élastique horizontal**

L'énergie potentielle élastique dépend de l'allongement du ressort.

$$E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

$x = \Delta l = l - l_0$ : Allongement du ressort

- **Cas du pendule élastique vertical**

L'énergie potentielle est $E_P = \frac{1}{2}kx^2$.

- L'énergie mécanique du système s'écrit donc :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

**Remarque** : Il est possible de retrouver l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique :

$$E = cte \Longrightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{1}{2}kx\frac{dx}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = 0$$

$\frac{dx}{dt}$ n'étant pas nulle il vient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

## 1.4. Etude énergétique de l'oscillateur harmonique

- **Cas du pendule élastique**

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\omega_0^2 = k/m \Longrightarrow k = m\omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

L'énergie instantanée est l'énergie de l'oscillateur à l'instant $t$. Determinons cette energie instantanée dans le cas du pendule élastique :

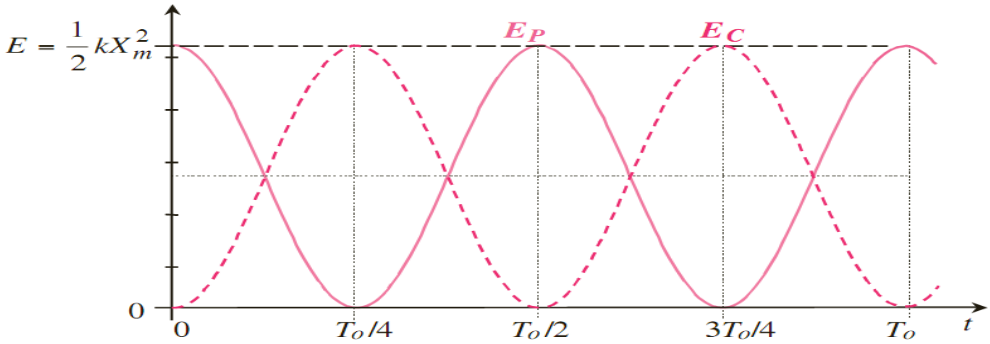
$$\left.\begin{array}{l} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E_C = \dfrac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ E_P = \dfrac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \end{array}\right.$$

L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$$

L'énergie mécanique de ce système conservatif ne varie pas au cours du temps : l'énergie mécanique est une constante du mouvement. Il y a échange continuel d'énergie entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique comme le montre le graphe suivant :




- Cet échange continuel se traduit par le fait que :
  - ✓ lorsque $E_P$ est maximale alors $E_C$ est nulle et minimale,
  - ✓ lorsque $E_c$ est maximale alors $E_P$ est nulle et minimale
- Les énergies potentielle et cinétique oscillent avec une période égale à la moitié de la période propre $T_0$ des oscillations
- On peut déterminer les valeurs moyennes temporelles ces énergies :

$$< E_P >= \frac{1}{T}\int_0^T E_P dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt = \frac{1}{2T} k X_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt$$

$$\boxed{< \boldsymbol{E_P} >= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \boldsymbol{k X_m^2}}$$

$$< E_C >= \frac{1}{T}\int_0^T E_C dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt = \frac{1}{2T} k X_m^2 \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt$$

$$\boxed{< \boldsymbol{E_C} >= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \boldsymbol{k X_m^2}}$$

$$< E > = \frac{1}{T}\int_0^T E dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX_m^2 dt = \frac{1}{2T}kX_m^2\int_0^T dt = \frac{1}{2T}kX_m^2 T$$

$$\boxed{< E > = \frac{1}{2}kX_m^2}$$

On voit bien que :

$$\boxed{< E_C > = < E_P > = \frac{1}{2} < E > = \frac{1}{4}kX_m^2}$$

## 1.5. Représentation de Fresnel

### 1.5.1. Définition du vecteur de Fresnel

On considère un signal sinusoïdal $s(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ auquel on associe un vecteur appelé **vecteur de Fresnel** qui a une norme égale **à** $X_m$ et qui fait, à l'instant $t$, l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe des abscisses.

Ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire $\omega$. On note $\vec{S}$ le vecteur de Fresnel associé au signal $s(t)$.

### 1.5.2. Vecteur de Fresnel du signal dérivé

$$\frac{ds(t)}{dt} = -X_m\omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'amplitude de $\frac{ds}{dt}$ est égale à l'amplitude de $s(t)$ multiplié par $\omega$ et sa phase initiale est égale à la phase initiale de $s(t)$ augmentée de $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi :

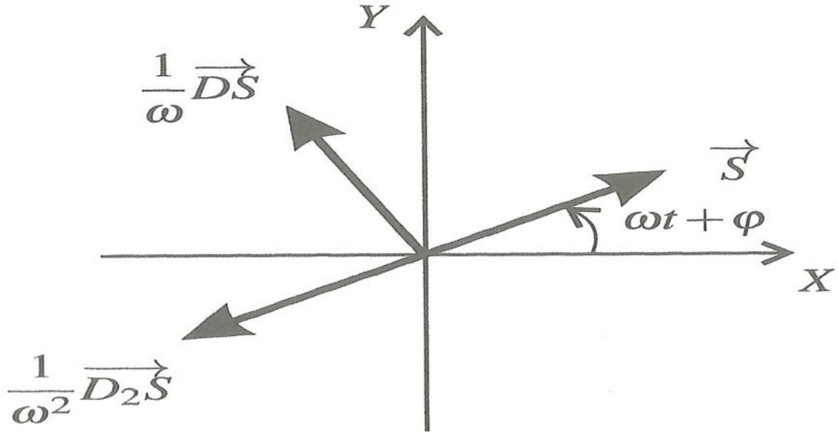
**Le vecteur de Fresnel associé à $\frac{ds}{dt}$ s'obtient à partir du vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ en effectuant les opérations suivantes :**

- **On tourne le vecteur d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique**
- **On multiplie la norme du vecteur par $\omega$.**

Le vecteur de Fresnel relatif à $\frac{ds}{dt}$ sera noté $\overrightarrow{DS}$ . Si on dérive le signal par deux fois, on tourne le vecteur d'un angle $\pi$ et on multiplie sa norme par $\omega^2$. Ainsi le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{D_2S}$ associé à $\frac{d^2s}{dt^2}$ est :

$$\overrightarrow{D_2S} = -\omega^2\overrightarrow{DS}$$

Cette relation n'est autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega$ dont le signal sinusoïdal est solution.




## 1.6. Portait de phase

### 1.6.1.Définition

- C'est la représentation dans le plan $\left(0, f(x), \frac{df(x)}{dt}\right)$ lorsque $t$ varie.
- On appelle point de phase, un point P figuratif dont les coordonnées à un instant donné $t$ sont $\left(f(t), \frac{df(t)}{dt}\right)$. Lorsque $t$ varie, le point $P$ décrit une courbe appelée trajectoire de phase.
- On appelle portrait de phase, l'ensemble des trajectoires de phase lorsque les conditions initiales varient.

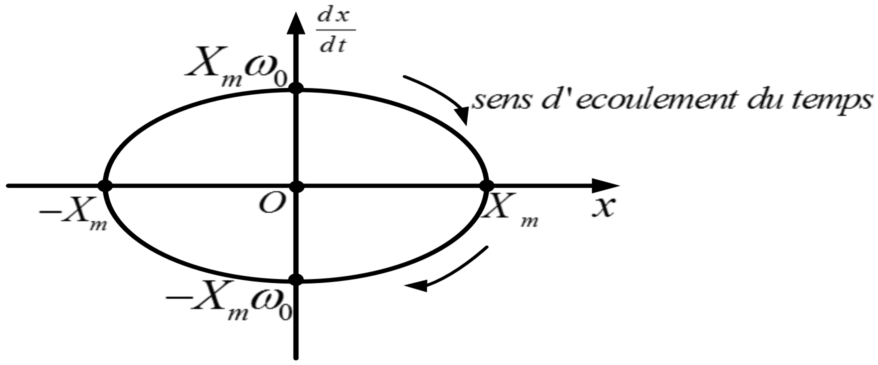
### 1.6.2.Portrait de phase d'un oscillateur harmonique $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$

Il suffit d'écrire l'équation liant $x$ et $\frac{dx}{dt} = v$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \dfrac{x^2(t)}{X_m^2} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \dfrac{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}{\omega_0^2 X_m^2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre $\Omega(0,0)$ de demi-axe $X_m$ et $X_m\omega_0$ dans le plan $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$




Lorsque $t$ augmente, $x(t)$ augmente vers sa valeur maximale $X_m$ et $\frac{dx(t)}{dt}$ diminue vers 0.

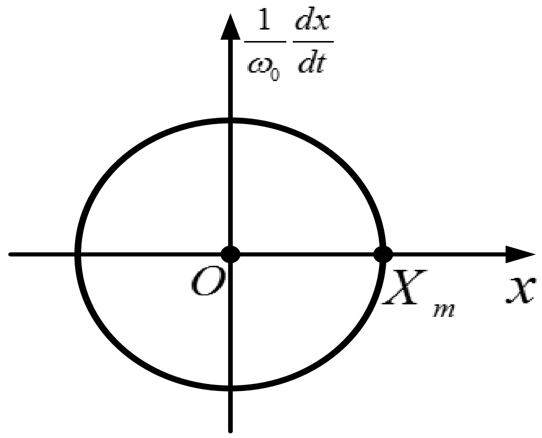
**Remarque** : la trajectoire d'un mouvement périodique est toujours fermé et symétrique par rapport à l'axe $(Ox)$ et parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

### 1.6.3.Portrait de phase d'un oscillateur harmonique $\left(x, \frac{1}{\omega_0}\frac{dx}{dt}\right)$

De l'équation de l'ellipse précédente on a :

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{\omega_0}\frac{dx}{dt}\right)^2 = X_m^2$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0,0)$ et de rayon $X_m$.




L'énergie est la même pour tous les points du cercle. Plus l'énergie augmente, plus le rayon du cercle est grand.